

METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE MÁXIMAS LLUVIAS: EL MODELO SQRT-ET_{max}

F. J. FERRER POLO
Confederación Hidrográfica del Júcar

1. INTRODUCCIÓN

El análisis estadístico de máximas lluvias es un campo de interés creciente en el campo de la meteorología, siguiendo un camino similar al ya seguido en la hidrología tanto en el análisis de los máximos caudales de avenida, como de las máximas lluvias que resultan el dato básico para alimentar a las distintas metodologías hidrometeorológicas habitualmente empleadas.

En este último caso, son mayoritariamente empleadas las series de lluvias diarias dada su mayor longitud y su mayor cobertura espacial y como ejemplo podría indicarse que el análisis estadístico de las máximas lluvias diarias resulta el proceso más laborioso y complejo de los incluidos en la metodología propuesta por la actual normativa española de drenaje de carreteras (MOPU-DGC, 1990) para la estimación de caudales de diseño.

En el presente trabajo se pasa revista al objetivo y principales elementos del análisis estadístico de máximas lluvias diarias, aunque puede extrapolarse a otra duración distinta, en caso de disponer de series de duraciones menores. Esta revisión, de carácter general, permite exponer los principales resultados de la metodología regional de variable índice utilizando la ley de frecuencia SQRT-ET_{max} y recientemente utilizada en la publicación de la Dirección General de Carreteras en el ámbito de la España peninsular (MF-DGC, 1999).

2. OBJETIVO Y METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE FRECUENCIA

El objetivo del análisis de frecuencias de máximos es la estimación del valor de la variable analizada, lluvia diaria en este caso, correspondiente a una determinada probabilidad de no ser superada o a un determinado período de retorno T, conceptos que pueden considerarse equivalentes.

Dada una serie temporal de la variable X, los sucesivos instantes donde dicha variable supera un determinado valor x estarán separados unos intervalos de tiempo t_i cuyo valor medio definirá precisamente el período de retorno asociado al valor x según la expresión:

$$(1) \quad T(x) = \text{Media}(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots)$$

Es evidente que la propia definición de período de retorno lleva implícito un comportamiento estacionario de la variable X y conviene resaltar que dicha definición no lleva asociado ningún concepto de probabilidad. Este último concepto surge al tratar de alcanzar una buena estimación de las relaciones X-T a partir de una serie continua registros. Para conseguir una eficiente estimación, se acude a una modelación estadística de las series temporales de datos que puede abordarse con

los siguientes tipos de modelos:

- a) series anuales de máximos (SAM)
- b) series umbral (SU)
- c) series de tiempo (ST)

En los modelos de SAM sólo se emplea el máximo valor observado en cada uno de los años, por lo que se dispone de una serie con tantos elementos como años disponibles de registro con independencia de la magnitud de los episodios. Por contra, en los modelos de SU, una vez fijado un umbral predefinido, se seleccionan todos aquellos valores que superan dicho umbral con independencia del número de valores adoptados en cada año.

El empleo de modelos estocásticos de ST sólo es justificable en aquellos casos en los que se aprecia una sensible correlación temporal y el incumplimiento de la hipótesis de independencia no permite emplear SAM ó SU. Las comparaciones entre SU y SAM suelen basarse en el trabajo de Langbein, W.B. (1949) que bajo ciertas hipótesis muestra como las diferencias entre ambos modelos son pequeñas y que, solo para pequeños períodos de retorno, puede tener cierta importancia. Estas pequeñas diferencias han conducido a un mayor empleo de los modelos de SAM que presentan por otra parte las siguientes ventajas operativas:

- a) no requieren la definición previa del umbral a considerar
- b) permiten usar conjuntos de datos reducidos, como por ejemplo los máximos valores mensuales de la variable a analizar, en lugar del total de la información original
- c) permite tratar con más flexibilidad los períodos de falta de datos que, tras una sencilla inspección de los datos de las estaciones meteorológicas cercanas, pueden no condicionar el máximo anual. Este enfoque de SAM permite el empleo de los datos de máximas lluvias diarias a escala mensual, que son los datos básicos empleados en los estudios hidrológicos clásicos y, en el caso de España, los datos suministrados fácilmente por el Instituto Nacional de Meteorología.

Una vez adoptada la modelación estadística de SAM como metodología de trabajo, la hipótesis básica asume que cada serie (x_1, x_2, \dots, x_n) es una muestra aleatoria de una población estacionaria cuya variable X sigue una determinada función de distribución $F(x)$:

$$(2) \quad F(x) = Prob(X \leq x)$$

El valor de la variable que tiene una probabilidad de excedencia de $1/T$ en cada año, se superará en media una vez cada T años, con lo que se obtiene la conocida relación entre T y el mencionado valor x_T , denominado habitualmente cuantil:

$$(3) \quad 1 - F(x_T) = 1/T$$

La modelación estadística de SAM, cuyo objetivo es la obtención de los cuantiles x_T , requiere en general (Cunnane, C., 1987) la elección de:

- a) tipo de función de distribución
- b) método de estimación de parámetros y cuantiles
- c) esquema para un uso combinado de datos locales, regionales e históricos

La elección de la función de distribución que mejor se "ajusta" a los datos observados es la línea de investigación seguida hasta la mitad de la década de los setenta, siendo un buen ejemplo el trabajo de Benson, M.A. (1968).

El análisis de la bondad de distintos métodos de estimación de cuantiles a partir de una sola muestra es frecuentemente tratado en la década de los setenta y comienzo de los ochenta. Como ejemplo,

pueden citarse el análisis del sesgo en los parámetros estimados por el método de momentos (MOM) (Wallis, J.R., *et al.* 1974), o más recientemente el análisis de la eficiencia del método de los momentos ponderados probabilísticamente (PWM) mediante técnicas de simulación de Montecarlo (Hosking, J.R.M., *et al.* 1985).

Sólo a partir de la década de los ochenta los trabajos se centran en conseguir, mediante técnicas de análisis regional (Lettenmaier, D.P. y Potter, K.W., 1985) y el empleo de información histórica (Jin, M. y Stedinger, J.R., 1989), la reducción de la varianza de los cuantiles estimados.

Las actuales líneas de investigación consideran el problema de la modelación en su conjunto, incluyendo la correspondiente elección en cada una de las tres facetas ya indicadas: tipo de función de distribución, método de estimación de parámetros y método de regionalización. En este sentido, la adopción de la ley de frecuencia de Gumbel, utilizando exclusivamente los datos de cada estación meteorológica y estimando sus parámetros por el método de MOM, es sólo una de las múltiples posibilidades existentes, sin una específica base científica.

El presente trabajo tiene por objeto dar una panorámica de las posibilidades más habituales en cada uno de los elementos descritos, incluyendo asimismo formulaciones y características concretas de una determinada propuesta (Ferrer, F.J. y Ardiles, L., 1994) basada en la utilización del modelo de función de distribución SQRT-ET_{max}, adoptando un esquema regional de "variable índice" y un método de estimación de parámetros de momentos (MOM) o, más recientemente, (Ferrer F.J. y Mateos, C., 1999) de momentos ponderados probabilísticamente (PWM).

La anterior propuesta supone una alternativa válida y sencilla de aplicar para el análisis estadístico de máximas lluvias en ambientes mediterráneos y es la más recientemente empleada a escala nacional (MF-DGC, 1999).

El contenido del resto de apartados es el siguiente:

- el apartado 3 trata las funciones de distribución habitualmente empleadas
- el apartado 4 detalla distintos procedimientos de estimación de parámetros y cuantiles exclusivamente con datos locales
- el apartado 5 plantea distintas alternativas de estimación regional de parámetros, incluyendo aspectos importantes en la definición de regiones
- el apartado 6 trata el tema de la comparación entre modelos alternativos
- el apartado 7 resume algunos resultados de comparación entre distintos modelos, siguiendo el trabajo de Ferrer, F.J. (1996) con datos de lluvias máximas diarias en la España peninsular

3. TIPOS DE FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN: LA FUNCIÓN SORT-ET_{max}

La manera más frecuente de tratar la función de distribución de una variable es el empleo de modelos paramétricos que adoptan una determinada formulación algebraica basada en unos parámetros a estimar a partir de los datos disponibles. Esta formulación algebraica $F(\cdot)$ deberá tener un rango de valores comprendido entre 0 y 1, así como ser continua y monótona no decreciente, lo que se consigue en un determinado campo factible de sus parámetros.

Numerosos han sido los modelos de función de distribución empleados en hidrología para el tratamiento de SAM, justificándose su uso por razones teóricas, por reproducir características estadísticas encontradas en las muestras o simplemente por afán de innovación.

Entre las funciones de distribución con una cierta justificación teórica se encuentran la de Gumbel y la Log-Normal. En el primer caso se puede demostrar que, si los valores de la variable analizada a lo largo del año son independientes, el número anual de ocurrencias sigue una ley de Poisson y

la magnitud de los valores sigue una función de distribución exponencial, la SAM resultante es una función de distribución de Gumbel. En el segundo caso, es clásico el trabajo de Chow, V.T. (1954) que indica que, si el máximo valor anual de una variable puede considerarse como el resultado del producto de un elevado número de acciones aleatorias con una distribución normal, la SAM se distribuirá según una lognormal.

Con independencia de las anteriores justificaciones teóricas, ligadas a hipótesis ciertamente restrictivas, el buen acuerdo empírico es básico a la hora de emplear uno u otro modelo de ley. En este sentido, una amplia gama de funciones de distribución de 2, 3 e incluso 4 y 5 parámetros (Tabla nº 1) han sido empleadas con la única característica común de tener un coeficiente de sesgo positivo, propiedad claramente observable en las SAM de lluvias diarias, lo que descarta la función de distribución normal.

Tabla nº 1: Tipos de función de distribución empleadas en análisis de máximas lluvias diarias.

Distribución	Formulación Matemática
2 parámetros Gumbel	$F(x) = \exp \left[-e^{-\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)} \right]$
Lognormal 2	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c\alpha}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log x - u}{\alpha} \right)^2 \right]$
SQRT-ET _{max}	$F(x) = \exp \left\{ k \left[\left(1 + \sqrt{\alpha x} \right) \exp \left(-\sqrt{\alpha x} \right) \right] \right\}$
3 ó más parámetros Lognormal 3	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k(x-u)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\log(x-u) - \alpha}{k} \right]^2 \right\}$
GEV	$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 - k \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right]^{1/k} \right\}$
Log Pearson 3	$f(x) = \frac{1}{ \alpha x \Gamma(k)} \left(\frac{\log x - u}{\alpha} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{\log x - u}{\alpha} \right) \right]$
TCEV	$F(x) = \exp \left[-e^{-(x-u)/\alpha_1} \right] \exp \left[-e^{-(x-u_2)/\alpha_2} \right]$
Wakeby	$x = m + a \left\{ 1 - [1 - F(x)]^b \right\} - c \left\{ 1 - [1 - F(x)]^d \right\}$

Entre las funciones de dos parámetros destacan, por su empleo Gumbel y lognormal de 2 parámetros, según un informe del Secretariado de la Organización Meteorológica Mundial (WMO, 1984) y más recientemente la función SQRT-ET_{max} propuesta por Etoh, T, *et al.* (1987) específicamente para modelar SAM de lluvias diarias.

En las de tres parámetros destaca la ley log Pearson 3, recomendada en la actual normativa americana para el tratamiento de caudales (USWRC, 1981), y especialmente la función de valores extremos generalizados (GEV), que fue inicialmente recomendada en Gran Bretaña para el análisis de SAM hidrológicos (NERC, 1975), siendo empleada habitualmente en la actualidad en dicho país para el análisis de precipitaciones (Reed, D.W., 1992). Del mismo modo se ha empleado en España para el análisis de lluvias diarias (Saenz de Ormijana, F., *et al.*, 1991) y presenta como características positivas la sencillez de su formulación y el hecho de incluir la distribución de Gumbel como caso particular, cuando el parámetro k tiende a cero.

El modelo de cuatro parámetros "Two Component Extreme Value" o TCEV, (Rossi, F., *et al.*, 1984) asume la existencia de dos posibles mecanismos generadores distintos, lo que en zonas mediterráneas puede estar ligado con la actuación o no de tormentas convectivas. Cada uno de estos mecanismos, el "básico" y el "extraordinario", puede ser modelado mediante una distribución Gumbel, con lo que resulta el modelo TCEV como producto de ambos.

El modelo Wakeby de 5 parámetros fue propuesto por Houghton, J.C., (1978), asumiendo que el máximo valor anual es el resultado de la acción simultánea de dos mecanismos generadores y por tanto suma de dos variables aleatorias.

Así pues, se aprecia, junto a modelos tradicionales de 2 ó 3 parámetros, una doble línea de investigación: el empleo de modelos mixtos, que conduce a un mayor número de parámetros y por tanto a una necesaria estimación regional de dichos parámetros y la definición de nuevos modelos de sólo dos parámetros, de mayor robustez, como es el caso de la función SQRT-ET_{max}, propuesta en este trabajo.

A continuación se van a resumir los aspectos fundamentales de la formulación de la función SQRT-ET_{max} en lo que se refiere a sus bases teóricas y sus principales características: cuantiles y momentos convencionales y ponderados probabilísticamente, siguiendo el trabajo de Ferrer, F.J., (1996).

3.1. Bases teóricas de la función de distribución SQRT-ET_{max}.

El modelo de función de distribución SQRT-ET_{max} (Etoh, T., *et al.*, 1987), debe su nombre a la propia descripción de su función de distribución:

$$(4) \quad \begin{aligned} F(x) &= 0 && (x < 0) \\ F(x) &= \exp \left\{ k / (1 + \sqrt{\alpha x}) \exp(-\sqrt{\alpha x}) \right\} && (x \geq 0) \end{aligned}$$

en donde α ($\alpha > 0$) es el parámetro de escala y k ($k > 0$) el parámetro de forma.

Este modelo está basado en el modelo SQRT-K (Etoh, T. y Murota, A., 1986) que describe la cantidad total de lluvia de una tormenta individual a partir de las siguientes hipótesis:

a) la duración y la intensidad máxima en una tormenta individual son variables independientes
b) la duración se distribuye según una función exponencial y la intensidad máxima según una distribución Gamma

c) la cantidad total de lluvia es proporcional al producto de duración e intensidad siendo la constante de proporcionalidad de 0,5, lo que conlleva una forma triangular del hietograma. El modelo SQRT-K resulta de una importante complejidad analítica, al incluir en su formulación la función de Bessel modificada de segundo orden, por lo que Etoh, T. *et al.* (1987) realizan una aproximación analítica en la formulación, válida para valores grandes de la variable, denominada SQRT-ET, con las siguientes expresiones para sus funciones de densidad y distribución:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\sqrt{\alpha x}) \quad x \geq 0$$

(5)

$$F(x) = 1 - (1 + \sqrt{\alpha x}) \exp(-\sqrt{\alpha x})$$

Si cada una de las tormentas producidas en un año se consideran independientes e idénticamente distribuidas: $Z_i, i=1,2,\dots,N$, y se asume que N sigue una distribución de Poisson con media k , el valor máximo anual de lluvia en dichas tormentas (x) es el máximo de un proceso de Poisson y responde a la siguiente función de distribución:

$$(6) \quad F(x) = \exp(-k[1-G(z)])$$

siendo $G(z)$ la función de distribución de la cantidad de lluvia (z) asociada a las distintas tormentas.

Bajo la hipótesis de que $G(z)$ responde a un modelo SQRT-ET, con la función de distribución indicada en (5), la expresión (6) se transforma finalmente en la expresión ya mostrada en (4) y que define finalmente el modelo SQRT-ET_{max}. Conviene recordar que si $G(z)$ sigue una distribución exponencial en lugar de la SQRT-ET, el resultado alcanzado para $F(x)$ es la tradicional ley de Gumbel.

La función de densidad, obtenida derivando la función de distribución (4) y añadiendo un factor corrector para condicionarla a valores no negativos de la variable x , responde a la siguiente expresión final:

$$(7) \quad f(x) = \frac{k}{1-e^{-k}} \frac{\alpha}{2} \exp(-\sqrt{\alpha x}) F(x) \quad x \geq 0$$

Así pues el modelo SQRT-ET_{max} definido por las expresiones (4) y (7) permite modelar el valor máximo anual de lluvia si el número de tormentas anuales N sigue una distribución de Poisson y la cantidad total de lluvia de una tormenta individual sigue una distribución SQRT-ET. En este sentido Etoh, T. *et al.*, (1987) recomiendan expresamente el modelo SQRT-ET_{max} para modelar las series de máximos anuales de lluvias diarias.

3.2. Momentos (MOM) de la función de distribución SQRT-ET_{max}

El momento de orden r respecto al origen α_r responde a la siguiente expresión:

$$(8) \quad \alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

que aplicada al modelo SQRT-ET_{max} resulta:

$$(9) \quad \alpha_r = \frac{k}{1-e^{-k}} \frac{1}{2\alpha^r} I_r$$

siendo

$$(10) \quad I_r = \int_0^\infty z^r \exp(-\sqrt{z}) \exp\{-k[(1+\sqrt{z}) \exp(-\sqrt{z})]\} dz$$

una integral función exclusiva del parámetro de forma k y que sólo puede calcularse por métodos numéricos.

La evaluación de la media (μ), coeficiente de variación (C_v) y coeficiente de sesgo (C_s) lleva a:

$$(11) \quad \mu = \alpha_1 = \frac{k}{1-e^{-k}} \frac{I_1}{2\alpha}$$

$$(12) \quad C_v = \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{2 \left(\frac{1-e^{-k}}{k}\right) I_2 - I_1^2}}{I_1}$$

$$(13) \quad C_s = \frac{\alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3}{(\alpha_2 - \alpha_1^2)^{3/2}} = \frac{4\left(\frac{1-e^{-k}}{k}\right)^2 I_3 - 6\left(\frac{1-e^{-k}}{k}\right) I_1 I_2 + 2I_1^3}{\left[2\left(\frac{1-e^{-k}}{k}\right) I_2 - I_1^2\right]^{3/2}}$$

con lo que sólo la media depende del parámetro de escala, determinando el parámetro de forma tanto el C_v como el C_s , mostrándose en las figuras 1 a 3 la representación gráfica de la integral I_1 , del C_v y del C_s en función del parámetro de forma k.

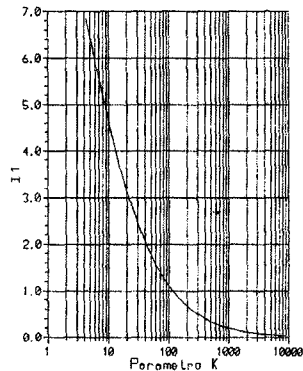


Figura nº 1: I_1 en función de k

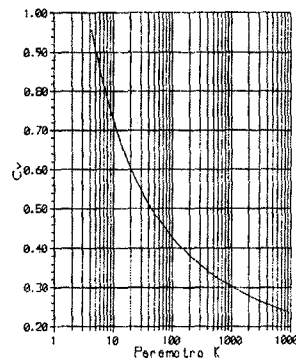


Figura nº 2: C_v en función de k

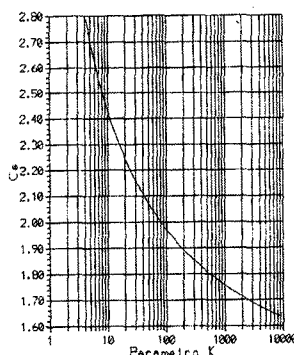


Figura nº 3: C_s en función de k

3.3. Cuantiles (x_T) de la función de distribución SQRT-ET_{max}

La estimación de los cuantiles x_T ó x_F , valor de la variable correspondiente a un determinado período de retorno T o probabilidad F de no ser superada, se reduce a obtener x en la expresión (4). Desafortunadamente no es posible expresar x de forma explícita y el cálculo debe realizarse por métodos numéricos.

En Ferrer, F.J., (1996) se propone tomar logaritmos en la expresión (4), con lo que resulta:

$$(14) \quad \frac{-\ln F}{k} = (1 + z_F) \exp(-z_F)$$

siendo

$$(15) \quad z_F = \sqrt{\alpha x_F}$$

La expresión (14) permite plantear un proceso iterativo de rápida convergencia con un valor inicial de $z_0=0$, mediante la siguiente expresión:

$$(16) \quad z_{i+1} = \ln \left(\frac{1 + z_i}{-\ln F / k} \right)$$

Una vez calculado $z_F(k)$, la obtención del cuantil real x_F se reduce a deshacer el cambio en (15), utilizando el parámetro de escala α .

Una expresión interesante es la que permite obtener los cuantiles adimensionales y_T , correspondientes a un valor unitario de la media, mediante la aplicación de (11):

$$(17) \quad y_T = \frac{x_F}{\bar{x}} = \frac{2 z_F^2}{I_1} \frac{1 - e^{-k}}{k}$$

Los cuantiles adimensionales sólo dependen del parámetro de forma k y su cálculo requiere la aplicación del esquema iterativo (16) y la obtención de la integral numérica I_1 definida en (10). Dada la relación existente entre el parámetro k y el C_v , mostrada en la figura 2, es posible obtener y_T de forma indistinta a partir de estos dos parámetros”.

En la figura 4 se muestran estos cuantiles como función del C_v , observándose su similitud con la distribución de Gumbel para valores bajos de C_v .

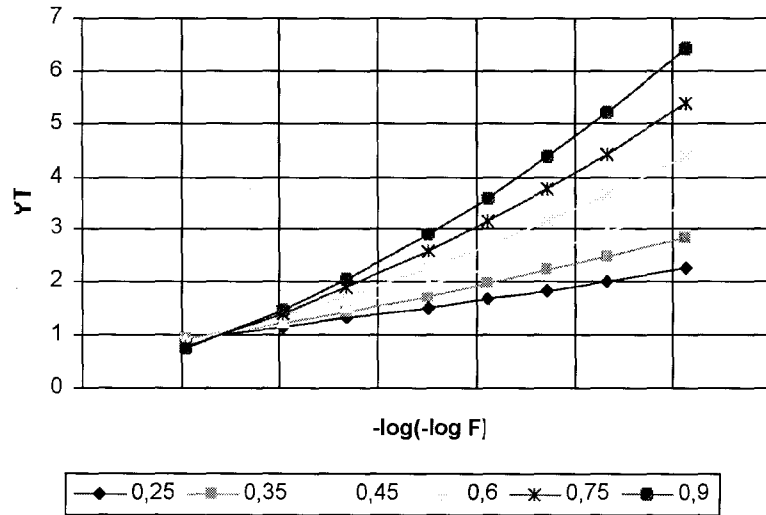


Figura n° 4: Cuantiles adimensionales y_T en función de C_v

3.4. Momentos ponderados probabilísticamente (PWM) de la función de distribución SQRT-ET_{max}

Los momentos ponderados probabilísticamente (PWM), propuestos inicialmente por Greenwood, J.A. *et al.* (1979) para aquellas distribuciones que pueden expresarse en forma invertible $x = x(F)$, responden a la siguiente expresión:

$$(18) \quad M_{ijk} = E \left[x^i F^j (1-F)^k \right] = \int_0^1 x(F)^i F^j (1-F)^k dF$$

siendo i, j, k números enteros.

Si $i=1$ y $k=0$, M_{1j0} son lineales en la variable x y pueden ser utilizados en la estimación de parámetros. Con una función de distribución de dos parámetros sólo es de interés el caso de $j=1$, pues M_{110} coincide con la media o momento convencional de orden 1, que responde a la siguiente expresión:

$$(19) \quad M_{110} = \int_0^1 x(F) F dF$$

El valor adimensional de M_{110} responde a la siguiente formulación:

$$(20) \quad m_1 = \frac{M_{110}}{M_{100}} = \frac{\int_0^1 x(F) F dF}{\bar{x}} = \int_0^1 \frac{x(F)}{\bar{x}} F dF$$

donde si aplicamos la expresión (17) resulta:

$$(21) \quad m_1 = \frac{2(1-e^{-k})}{k I_1} \int_0^1 z_F^2 F dF$$

Dada la no invertibilidad de la función de distribución, la expresión anterior no tiene expresión analítica, pero depende sólo del parámetro de forma k y mediante el algoritmo iterativo visto en (16) la integral puede ser evaluada de forma numérica, tabulando los resultados obtenidos. Este esquema, similar al propuesto por Song, D. y Ding, J., (1988) para la ley Pearson 3, permite obtener (figura 5) la relación entre m_1 y el parámetro de forma k .

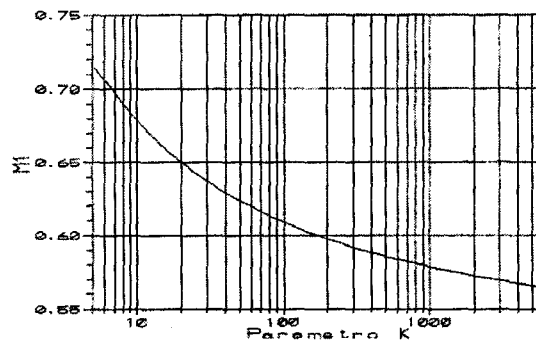


Figura n° 5: Valor de m_1 en función de k

4. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN LOCAL DE PARÁMETROS: APLICACIÓN A LA FUNCIÓN SQRT-ET_{max}

La estimación local de parámetros utiliza exclusivamente la serie de máximos anuales de la estación pluviométrica a modelar y emplea tradicionalmente los métodos de momentos (MOM), máxima verosimilitud (ML) y más recientemente de momentos ponderados probabilísticamente (PWM). Estos métodos utilizan la muestra formada por la SAM para estimar los parámetros de la población, con las siguientes alternativas:

- MOM: Obteniendo el valor de los parámetros que conducen a una población cuyos momentos coinciden con los observados en la muestra, estimando por tanto los momentos poblacionales mediante los muestrales.
- PWM: Similar al anterior, pero utilizando los PWM en lugar de los MOM convencionales

• ML: Obteniendo el valor de los parámetros que maximizan el valor del funcional ML y por tanto maximiza la probabilidad de que la muestra observada proceda de la población cuyos parámetros se estiman.

A continuación se desarrollarán estos métodos para la función de distribución SQRT-ET_{max}

4.1. Método de ML

El método de ML es el propuesto por Etoh, T. *et al.* (1987), que obtiene el logaritmo del funcional de ML, aplicando la expresión (7), con lo que resulta:

$$(22) \quad LL = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{k}{1-e^{-k}} \frac{\alpha}{2} \exp(-\sqrt{\alpha} x_i) \right] + \sum_{i=1}^n \ln F(x_i)$$

El procedimiento empleado en la obtención de los parámetros α y k que maximizan LL es el descrito en Etoh, T. *et al.* (1987) y recomendado en CEDEX, (1993) que, mediante un cambio de variable, permite una optimización unidimensional, que debe ser realizado mediante cálculo numérico.

4.2. Método de MOM

La aplicación del método de MOM (Ferrer, F.J. y Ardiles, L., 1994) requiere la estimación previa de los valores poblacionales de C_v y μ a partir de la muestra disponible, para estimar posteriormente los parámetros k y α . El uso de los valores numéricos correspondientes a la figura 2 permite obtener el valor del parámetro k a partir de C_v . Posteriormente la expresión (10), representada en la figura 1, se emplea para obtener I_1 , utilizando finalmente la expresión (11) para obtener α :

$$(23) \quad \alpha = \frac{k}{1-e^{-k}} \frac{I_1}{2\mu}$$

La inexistencia de expresiones analíticas para los momentos dificulta la aplicación de este método de estimación, por lo que Ferrer, F.J. (1996) ha desarrollado expresiones polinómicas para obtener directamente k e I_1 , válidas en el rango habitual de $0,25 \geq C_v \leq 0,90$ y consiguiendo un error menor de 0,2% en todos los casos:

obtención parámetro k

$$(24) \quad \ln(k) = \sum_{j=0}^6 a_j C_v^j$$

siendo

$$a_0 = 35,7643$$

$$a_1 = -232,469$$

$$a_2 = 786,509$$

$$a_3 = -1540,7$$

$$a_4 = 1751,47$$

$$a_5 = -1072,1$$

$$a_6 = 273,077$$

obtención integral I_1

$$(25) \quad I_1 = \sum_{j=0}^s b_j \text{Ln}(k)$$

siendo

con $C_v \leq 0,39$:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 15,6613 & b_1 = -7,3621 & b_2 = 1,42734 \\ b_3 = -0,141862 & b_4 = 0,0079117 & b_5 = -0,00014808 \end{array}$$

con $C_v \leq 0,39$:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 9,91329 & b_1 = -0,706919 & b_2 = -1,62227 \\ b_3 = 0,55121 & b_4 = -0,0709991 & b_5 = 0,0033553 \end{array}$$

4.3. Momentos ponderados probabilísticamente (PWM)

A partir de la estimación del valor de m_1 en la muestra, la resolución numérica de la expresión (21) permite obtener el parámetro k de forma. Para la estimación de m_1 se utilizan las expresiones propuestas por Hosking, J.R.M., *et al.*, (1985):

$$(26) \quad m_1 = \frac{M_{110}}{M_{100}}$$

$$(27) \quad M_{1j0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{i-0,35}{n} \right)^j$$

donde x_i , $i=1,2,\dots,n$ son los valores de la muestra ordenados de menor a mayor.

La resolución de (21) puede realizarse por métodos iterativos, que requiere la evaluación numérica de la integral involucrada y el uso del algoritmo iterativo ya visto en (16). Para facilitar la aplicación del método, Ferrer, F.J., (1996) propone la siguiente aproximación, válida para un rango $0,560 \leq m_1 \leq 0,715$:

$$(28) \quad \text{Ln}(k) = \sum_{j=0}^s c_j m_1^j$$

siendo:

con $m_1 \leq 0,605$:

$$c_0 = 3290,01 \quad c_1 = -16009,5 \quad c_2 = 26100,6 \quad c_3 = -14237,9$$

con $m_1 > 0,605$

$$c_0 = 456,995 \quad c_1 = -1908,37 \quad c_2 = 2692,31 \quad c_3 = -1278,33$$

5. ESQUEMAS PARA UN USO COMBINADO DE DATOS LOCALES Y REGIONALES: MÉTODO DE VARIABLE ÍNDICE CON LA FUNCIÓN SQRT-ET_{max}

5.1. Definición de la región

La estimación de parámetros a partir exclusivamente de una muestra, de reducido tamaño numerosas veces, presenta dificultades debido a la incertidumbre existente respecto a la representatividad de dicha muestra. Incluso asumiendo una única población, el coeficiente de variación (C_v), y sobre todo el coeficiente de sesgo (C_s), calculado en distintas muestras extraídas de dicha población, presentan una elevada varianza, que se traduce asimismo en una elevada dispersión en los parámetros y cuantiles estimados. Esta varianza, tanto mayor cuanto más reducida es la muestra y más alto el C_s de la población, hace recomendable el empleo de modelos de distribución de sólo dos parámetros para series de menos de 25 años y casi necesaria la estimación regional del tercer (USWRC, 1981) y cuarto parámetro (Rossi, F. *et al.*, 1984) para modelos con C_s libre.

La anterior situación conduce al desarrollo de numerosas metodologías que asumen la existencia de una región homogénea respecto a ciertas características estadísticas lo que permite aprovechar el conjunto de información disponible en dicha región, realizando algún tipo de promedio de dicha información. Es claro que la fase más importante de estos métodos es precisamente la definición de la región “homogénea”, aspecto en el que existen dos enfoques principales: regiones geográficas y regiones estadísticas, aunque dada la relativa continuidad espacial de la lluvia el primer enfoque es más empleado.

Las regiones geográficas se definen exclusivamente en función de sus coordenadas, a menudo coincidiendo con divisiones administrativas, lo que resulta sencillo pero puede plantear problemas respecto a la homogeneidad de la región.

La agrupación geográfica para el análisis de lluvias, normalmente con un estudio adicional de homogeneidad regional, ha sido empleada en numerosos trabajos en nuestro país. Saenz de Ormijana, F., *et al.* (1991) utiliza las regiones provinciales de Jaén-Córdoba y la de Málaga. El Instituto del Agua (1992) considera dos regiones en la cuenca del río Segura, situadas respectivamente aguas arriba y aguas abajo de la confluencia de los ríos Segura y Mundo. En un reciente trabajo a escala nacional, Ferrer, F.J. y Ardiles, L., (1994) dividen, en forma preliminar, el territorio peninsular en 26 regiones geográficas (figura 6)

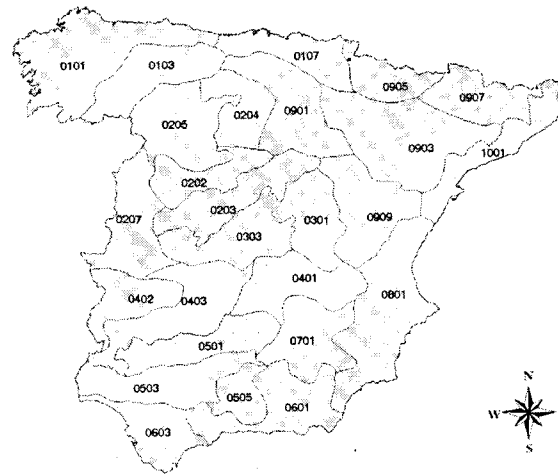


Figura nº 6: Regiones geográficas consideradas en Ferrer, F.J. y Ardiles, L., (1994)

La fase más controvertida en la utilización de información regional, es la determinación de qué estaciones son consideradas "similares" entre sí y pueden ser agrupadas en una cierta región para un tratamiento común, decidiendo el grado de heterogeneidad que puede asumirse para que siga siendo beneficioso el tratamiento conjunto.

En el estado actual del conocimiento no existe ningún procedimiento que permita asegurar una correcta definición de la región, aspecto en el que el conocimiento de los aspectos meteorológicos y climáticos necesariamente deben complementar a las técnicas estadísticas, para tratar adecuadamente las dos principales cuestiones: la homogeneidad regional y la discontinuidad que suponen los límites de la región.

Una excesiva heterogeneidad de la región puede conducir a valores prohibitivos en el sesgo de los cuantiles estimados, a pesar de la ventajosa reducción de su varianza. En este sentido, el punto clave es conseguir una región lo suficientemente homogénea, como para que predomine el efecto de reducción de varianza sobre el del posible sesgo y dé como resultado una estimación más exacta de los verdaderos cuantiles.

Este concepto es lo que Hosking, J.R.M., (1987) define como homogeneidad "operacional" y que desafortunadamente no se ve recogido en la bibliografía técnica. En contraste, si se encuentran numerosos trabajos que emplean el concepto de homogeneidad "estadística" y que suelen basarse en algún test de significancia de la hipótesis nula que postula que todas las series de la región tienen idéntico valor del estadístico regionalizado. Un test empleado en numerosos trabajos es el de χ^2 con un 5 % de nivel de significancia (Wiltshire, S.W., 1986). Este test suele tener escaso "poder" estadístico, es decir que frecuentemente conduce a que no pueda ser rechazada la hipótesis de homogeneidad regional. Otra objeción adicional de este tipo de test es que, en la práctica, conduce a que las regiones con muchas estaciones ven rechazada la hipótesis de homogeneidad, en tanto que aquellas con reducido número de estaciones ven aceptada dicha hipótesis, como puede observarse en los resultados de Acreman, M.C. y Sinclair, C.D., (1986).

Una última cuestión, usualmente no abordada por el test de homogeneidad, es qué puede hacerse cuando la hipótesis de homogeneidad regional es rechazada. A veces la división de la región en dos o más subregiones más homogéneas permite resolver el problema, pero la situación más frecuente es que la heterogeneidad sea debida a la presencia de un pequeño número de estaciones con valores anómalos. En este caso, la asignación de estas estaciones a otra región puede ser una solución, pero si no existe ningún argumento hidrológico para ello, se considera preferible asumir esta heterogeneidad. Habitualmente, este hecho se produce cuando unas importantes tormentas han ocurrido en sólo unas pocas estaciones en el período de registro, con lo que el emplear estos datos permite considerar la posibilidad de que estos sucesos pueden producirse en la totalidad de la región.

El enfoque tradicional de los métodos regionales presenta las siguientes dificultades:

- los límites de las regiones distan en la práctica de estar claramente definidos y muy a menudo son simples artificios teóricos.

- aún en el caso de estar claramente definidos, las discontinuidades que se producen en los resultados al traspasar dichos límites no resultan razonables.

Estas objeciones han sido abordadas en la práctica con dos enfoques distintos:

a) mediante esquemas de ponderación que asignan al punto una cierta combinación de los resultados de cada una de las regiones más "próximas", con lo que se suavizan los límites y se reducen los errores debido a una equivocada asignación.

b) considerando, no unas regiones fijas, sino unas regiones formadas por el conjunto de estaciones más próximas -caso de regiones geográficas- o más "similares" -caso de emplear características específicas- al punto analizado.

Un ejemplo de ponderación en el análisis de máximas lluvias diarias empleando regiones geográficas se da en el trabajo de Ferrer, F.J. y Ardiles, L., (1994) en el que se suavizan los límites regionales del Cv realizando una interpolación de los valores regionales mediante el método de inverso de la distancia al cuadrado.

Un ejemplo del segundo enfoque se encuentra en Reed, D.W., (1992), que sugiere el uso de regiones geográficas centradas en el punto a estudiar como forma de eliminar la discontinuidad resultante de los métodos tradicionales. En este trabajo, se introduce otro interesante concepto en la definición de regiones como es la posibilidad de considerar distintos límites en función del período de retorno a estimar. La idea básica es adoptar sólo el grado de regionalización necesario para el período de retorno considerado, con lo que la región va incrementando su tamaño conforme lo hace el grado de extrapolación estadística requerido.

5.2. El método de variable índice: aplicación a la función SQRT-ET_{max}

La clasificación de los distintos esquemas para un uso combinado de datos locales y regionales atiende a la característica estadística asumida constante en la región pudiéndose distinguir, en orden creciente de la hipótesis de homogeneidad:

a) C_s constante en la región

b) C_s constante en la región y Cv constante en cada subregión, también llamado enfoque jerárquico

c) C_s y C_v constante en la región, tradicionalmente denominado "variable índice"

Este último esquema de análisis regional, "variable índice", es el más ampliamente empleado en la actualidad en el tratamiento de lluvias máximas y utiliza de forma conjunta las j estaciones que componen la región considerada.

Este esquema asume que los cuantiles locales se obtienen reescalando mediante la media local μ_j , estimada generalmente con su valor muestral, una única ley regional adimensional y_T de media unidad según la clásica expresión:

$$(29) \quad (x_T)_j = y_T \mu_j$$

Así pues, el análisis regional se reduce a estimar la ley regional adimensional y_T de media unidad, que suele abordarse con los siguientes procedimientos:

- hipótesis “año-estación” y estimación por ML de la serie resultante
- regionalización de los momentos convencionales (MOM)
- regionalización de los momentos ponderados probabilísticamente (PWM)

En el primer caso (NREC, 1975), los valores de cada estación j serie se estandarizan dividiéndolos por su media local μ_j y se agrupan en una serie única que se utiliza para estimar la ley regional y_T mediante el método de ML.

En los otros dos casos, se realiza un promedio regional de los MOM ó PWM muestrales, realizado de forma proporcional a la longitud de cada serie según la siguiente expresión:

$$(30) \quad \theta_R = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m n_j \theta_j$$

siendo θ_j el valor local del momento, MOM o PWM, estimado en la muestra j de longitud n_j y θ_R el valor regional resultante. Puesto que la media debe ser la unidad, la expresión (30) deberá aplicarse al momento de orden 2, 3,..i, siendo i el número de parámetros que caracterice a la función de distribución.

Para el modelo SQRT-ET_{max}, la ley y_T de media unidad sólo depende del parámetro de forma k , según se vio en la expresión (14), por lo que el problema se reduce a la estimación regional de dicho parámetro.

En el caso de emplear MOM ó PWM se tendría:

- MOM (Ferrer, F.J. y Ardiles, L., 1994): $\theta = C_v$ con lo que, una vez estimado su valor regional, el valor del parámetro regional k se obtiene mediante la expresión (24).
- PWM (Ferrer, F.J., 1996): $\theta = m_1$, definido mediante las expresiones (26) y (27) con lo que, una vez estimado su valor regional, el valor del parámetro regional k se obtiene mediante la expresión (28).

6. METODOLOGÍAS DE COMPARACIÓN ENTRE MODELOS ALTERNATIVOS

6.1. Procedimientos para la selección entre modelos alternativos

Tal y como se recalcó en apartados anteriores, las líneas actuales de investigación consideran de forma global el problema de la modelación estadística de SAM, no admitiéndose una distinción artificial entre el tipo de función de distribución, el método de estimación de parámetros o el método de regionalización adoptado.

Esta visión actual resta importancia a la selección de la función de distribución que fue el punto clave hasta mitad de la década de los 70 y admite que no existe una única función aplicada a la

generalidad de los casos, centrando el análisis en el modelo operativo completo. Tratando de sistematizar el conjunto de técnicas empleadas para la selección entre modelos alternativos, WMO, (1989) distingue dos tipos principales:

- Técnicas que contrastan la capacidad "descriptiva" o capacidad del modelo para reproducir las propiedades estadísticas de los datos. Esta capacidad descriptiva puede analizarse: a) cuantificando el grado global de ajuste conseguido y b) analizando específicamente el grado de reproducción conseguido en la cola derecha de la distribución de frecuencia y que marca precisamente la zona de interés de los estudios de máximos.
- Técnicas que contrastan la capacidad "predictiva" o la capacidad de un modelo para estimar los cuantiles de una población, incluso cuando ésta sigue un modelo de ley distinta a la supuesta. Este conjunto de técnicas no son especialmente aplicadas en la práctica por los Servicios de Hidrología y Meteorología de los distintos países como muestra WMO, (1984). En este trabajo, se puntualiza que la selección del modelo es realizada frecuentemente de manera subjetiva, siguiendo criterios como los siguientes: a) aceptado de forma mayoritaria, b) sencillo y fácil de aplicar, c) razonablemente flexible y robusto, d) con argumentos teóricos, e) documentado en alguna guía de un Organismo oficial. Este tipo de argumentos son los que justifican en nuestro país el extendido empleo de la distribución de Gumbel para el análisis de las máximas lluvias diarias, sin plantear alternativas estadísticamente más fundadas.

En Ferrer, F.J. (1996) se describe en detalle el conjunto de técnicas disponibles para el análisis de la capacidad descriptiva y predictiva de un determinado modelo, algunas de las cuales se describen a continuación.

6.2. Análisis de la capacidad descriptiva global

Estos métodos utilizan criterios de descripción general, con la limitación que supone no analizar expresamente el comportamiento de la cola derecha de la distribución, que es precisamente el que tiene relación con el problema de los cuantiles con un alto período de retorno. A continuación se describen algunos de los más frecuentes, que pueden clasificarse dentro de los siguientes grupos generales:

- Métodos visuales
- Tests estadísticos
- Índices numéricos de ajuste
- Métodos específicos

Métodos visuales

Los métodos más simples están basados en la inspección visual de las series observadas, empleando para ello tanto el histograma como la función de probabilidad utilizando en este último caso el denominado "papel de probabilidad" y una fórmulas de gráfico para dibujar cada uno de los datos en un gráfico valor-probabilidad. Es clásico el trabajo de Gumbel, E.J., (1941) que introdujo el denominado papel de Gumbel que consigue que la función de distribución se represente gráficamente como una línea recta en el caso de seguir dicha distribución.

Las objeciones a este tipo de métodos, aparte de la subjetividad propia de la inspección visual, se centran en el hecho de que una muestra extraída de una población puede mostrar un aspecto gráfico bien distinto al correspondiente a dicha población. Es decir, dada la variabilidad inherente a las

muestras, la posibilidad de error de este tipo de métodos es bastante elevado, lo que se confirma por la amplitud de los límites de confianza.

Tests estadísticos de χ_2 y de Kolmogorov-Smirnov (K-S)

Los tests de χ_2 y de K-S, cuyo proceso operativo puede consultarse en Yevjevich, V., (1972), plantean la hipótesis nula de que la muestra observada proviene de una determinada población, pudiéndose aceptar o rechazar dicha hipótesis con un determinado nivel de significancia. El primer test permite considerar explícitamente el número de parámetros, en tanto el segundo tiene en cuenta la longitud de la serie, aunque ambos tienen un limitado poder estadístico, lo que suele conducir a que no pueda rechazarse la hipótesis nula planteada.

El empleo de estos tests en la selección entre modelos alternativos no es inmediato, pues su único resultado es la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

Índices numéricos de ajuste

El empleo de índices numéricos de ajuste, cuantifica las diferencias entre los cuantiles calculados y los observados, entendidos estos últimos como los resultantes de la aplicación de una determinada fórmula de gráfico a la muestra previamente ordenada. Es clásico el trabajo de Benson, M.A., (1968) y aunque es un método sencillo y muy intuitivo, presenta las siguientes objeciones:

- es dependiente de la fórmula de gráfico empleada, aunque las conclusiones obtenidas suelen ser poco sensibles
- no permite obtener resultados para períodos de retorno superiores a los equivalentes a la longitud de la serie
- no tiene en cuenta el número de parámetros de la distribución, por lo que con independencia de cuál sea la población se consigue un mejor ajuste asumiendo modelos de ley con más parámetros
- no considera el hecho de que la varianza muestral de los valores altos de una muestra es mayor que la correspondiente a los valores bajos.

Métodos específicos

Un indicador evidente de la capacidad descriptiva de un modelo de ley sobre una muestra es el valor de su funcional de ML, aunque en este caso queda restringido a una estimación de parámetros por el método de ML. Asimismo, para poder establecer conclusiones, la comparación sólo puede realizarse entre modelos de ley con idéntico número de parámetros. Este es el método empleado por Etoh, T. *et al.*, (1987) para comparar, a partir de 56 SAM de lluvias diarias, las distribuciones de dos parámetros Gumbel y SQRT-ET_{max}, obteniendo mejores resultados con esta última en 44 de las series.

6.3. Análisis de la capacidad descriptiva de la cola derecha de la distribución de frecuencia

El análisis de la cola derecha de la distribución de frecuencias presenta un especial interés en el estudio de máximos hidrológicos, puesto que marca el valor de los cuantiles de alto período de retorno.

Para abordar este análisis suelen seleccionarse los siguientes parámetros representativos:

- los momentos convencionales de orden 3 (C_3) o incluso superior
- el máximo valor observado en las muestras (x_N)

La comparación entre los valores teóricos de estos parámetros, resultantes de los modelos alternativos, y los realmente observados en las muestras, es una línea sumamente atrayente en la selección de modelo. La principal objeción de este enfoque es la propia dificultad, en el caso específico de tratar con estadísticos representativos de la cola derecha de una distribución, para estimar el valor poblacional cuando sólo se disponen de valores muestrales, lo que hace que raramente los resultados sean concluyentes.

En el clásico trabajo de Wallis, J.R. *et al.*, (1974) se comprueba, mediante simulación de Montecarlo, que los C_3 muestrales son sensiblemente inferiores al poblacional, para una longitud de serie similar a las utilizadas en la práctica, presentando además una variabilidad tan elevada que resulta sumamente difícil su empleo para estimar el valor poblacional.

Las anteriores dificultades son abordadas en la práctica: a) tratando de mejorar las estimas muestrales o b) sustituyendo los valores poblacionales por valores obtenidos mediante técnicas de Montecarlo. En el primer caso, pueden aplicarse factores correctores del sesgo (Wallis, J.R. *et al.*, 1974) para el C_3 y emplear valores regionales para reducir la varianza muestral. En el segundo caso, se generan muestras aleatorias a partir de la población, lo que permite considerar explícitamente la incidencia de la longitud de las series.

Seguidamente se revisarán una serie de trabajos en que se aplican las ideas descritas anteriormente, realizando la siguiente clasificación:

- Análisis del máximo valor observado en las muestras (x_N)
- Diagrama de momentos
- Simulaciones de Montecarlo

Análisis del máximo valor observado en las muestras (x_N)

El análisis del máximo valor de una muestra de longitud dada ha sido empleada por Etoh, T. *et al.*, (1987) y el Instituto del Agua (1992) comparando el valor teórico con el observado en las muestras. Etoh, T. *et al.*, (1987) utiliza la tradicional expresión:

$$(31) \quad P = \left(1 - \frac{I}{T}\right)^N$$

para cuantificar la probabilidad P de que en una muestra de N años no se exceda una lluvia con un período de retorno T. Considerando $N = T$ y para series largas ($N > 50$), la expresión (31) converge a $P = 0,37$, lo que quiere decir que en un 37 % de las series consideradas el máximo valor observado debería ser inferior al cuantil estimado con $T = N$. Este resultado teórico concuerda con los resultados obtenidos con la ley SQRT-ET_{max} (34 %) y difiere sensiblemente de los obtenidos con la ley EV1 (7 %) lo que reafirma el buen comportamiento de aquella ley.

El Instituto del Agua (1992) define el estadístico k como el máximo valor observado en cada muestra pero estandarizado mediante la sustracción de la media teórica y el cociente por la desviación típica de dicho máximo valor. Un buen comportamiento del modelo de ley debe "ofrecer valores de k próximos a cero y equidistribuidos respecto a este valor central". Este test selecciona el modelo SQRT-ET_{max} entre un conjunto de modelos alternativos.

Diagrama de momentos

Los "diagramas de momentos" son gráficos x , y en los que se representan las relaciones teóricas entre los momentos convencionales: C_s respecto a C_v y C_k (momento adimensional de cuarto orden) respecto a C_s . La comparación entre estas relaciones teóricas de distintos modelos de ley y los valores observados permiten discriminar entre modelos alternativos. Dada la variabilidad de los estadísticos muestrales, suelen emplearse como valores "observados" estimaciones regionales de los mismos.

Comparaciones teóricas entre los modelos TCEV, GEV y LN2 han sido llevadas a cabo por Beran, M.A. *et al.*, (1986) utilizando el diagrama C_s , C_k y por Rossi, F. *et al.*, (1986) mediante el diagrama C_v , C_s .

Una interesante aplicación de diagramas de momentos se encuentra en Schaefer, M.G., (1990). La estimación regional mediante PWM de los parámetros de una ley WAK y el posterior dibujo de los valores resultantes de C_s y C_k en las 4 regiones analizadas, mostró un buen ajuste con la relación teórica de la distribución GEV.

Simulaciones de Montecarlo

La técnica de simulación de Montecarlo se basa en generar un número suficientemente grande de series aleatorias a partir de una hipótesis de población y comparar la similitud entre las muestras observadas y generadas, utilizando para ello los valores muestrales del coeficiente de sesgo (C_s) o el máximo valor (x_N)

Como inconvenientes de este tipo de métodos cabe indicar el elevado esfuerzo computacional requerido y la necesidad de realizar una estimación previa de la función de distribución de la población en cuanto a modelo de ley y valor de sus parámetros. Por contra, permite fácilmente considerar factores como las distintas longitudes de las series empleadas.

Es interesante comparar el análisis que sobre el C_s realizan Matalas, N.C., *et al.*, (1975) y Rossi, F., *et al.*, (1984) y que se ve reproducido en otros trabajos. En el primer caso, para cada región estudiada, se emplean sólo la media y la desviación típica del C_s muestral de las estaciones contenidas en la región, mientras que en el segundo trabajo se emplean todos los valores muestrales del C_s a los que se asigna probabilidad mediante una fórmula de gráfico. El primer método permite, representando en abscisas la media y en ordenadas la desviación típica del C_s , comparar simultáneamente los resultados de varias regiones mientras el segundo analiza los resultados en una sola región, pero es ciertamente una generalización de aquel.

6.4. Análisis de la capacidad predictiva

La capacidad de un modelo para estimar adecuadamente los cuantiles con independencia de cual sea la población es, en la práctica, su más interesante cualidad pues dicha población nunca es conocida. Siendo x_T los cuantiles reales de la población \hat{x}_T las estimas que de dichos cuantiles hace el modelo estadístico seleccionado, la bondad de un modelo se mide habitualmente por su sesgo (b_T), su varianza (var_T) y su error (e_T) definidos por las siguientes expresiones:

$$(32) \quad b_T = E(\hat{x}_T) - x_T$$

$$(33) \quad var_T = E[\hat{x}_T - E(\hat{x}_T)]^2$$

$$(34) \quad e_T^2 = E [\hat{x}_T - x_T]^2 = b_T^2 + var_T$$

Un modelo tiene una buena capacidad predictiva, o lo que es lo mismo es robusto, si es capaz de estimar los cuantiles reales x_T con un bajo error e_T . Esto significa una buena aproximación en media, o bajo sesgo b_T , y una reducida varianza var_T , también llamada alta eficiencia. Puesto que los verdaderos cuantiles x_T nunca son conocidos, la evaluación de las anteriores expresiones no es en general posible, aunque la robustez de un determinado modelo puede ser contrastada por métodos tradicionales y fundamentalmente con técnicas de simulación de Montecarlo. Un método intuitivo de cuantificar la robustez de un modelo es realizar la estimación de los cuantiles con y sin el máximo valor y analizar el período de retorno asignado a dicho valor. Este método es empleado por Etoh, T., *et al.*, (1987) en el análisis de lluvias diarias con los modelos Gumbel, SQRT-ET_{max} y LN3, concluyendo que los elevadísimos períodos de retorno resultantes del modelo Gumbel parecen indicar la existencia de un importante sesgo negativo con dicho modelo. La gran variación en los resultados del modelo LN3 ponen de manifiesto la elevada varianza característica de los modelos con 3 o más parámetros empleados sin estimación regional de parámetros y sólo el modelo SQRT-ET_{max} conduce a resultados robustos.

El método tradicional más empleado para analizar la robustez de un modelo es de utilizar submuestras de la serie histórica ("split tests"). La subdivisión de la serie original ha sido empleado por Beard, L.R., (1974) y Hardison, C.H., (1974), incluyéndose un resumen del primer trabajo como anejo en USWRC, (1981), para demostrar el buen comportamiento del modelo LP3 con uso del coeficiente de sesgo regional. En estos métodos de "split", la comparación de los resultados alcanzados en las distintas submuestras permiten analizar la eficiencia del método de estimación, en tanto que su contraste con los resultados de la serie completa da una idea del sesgo y del error de dicho método. Estos métodos tradicionales han sido prácticamente abandonados en los trabajos recientes en favor de las técnicas de Montecarlo, en las que se asume conocida la población y por tanto el verdadero valor de x_T . La generación de numerosas muestras, a las que se aplica el modelo propuesto y en las que se estima \hat{x}_T , permite evaluar las expresiones (32) a (34) y extraer las oportunas conclusiones. Este proceso es repetido con distintas hipótesis de población, para analizar la sensibilidad de los resultados ante el modelo poblacional.

Esta técnica permite tener en cuenta la incidencia del tamaño de las muestras y seleccionar de manera objetiva aquel modelo que, bajo un conjunto de poblaciones "razonables", conduce al menor sesgo (b_T) y al menor error (e_T). Asimismo permite analizar distintos métodos de estimación local o regional de parámetros. En este último caso deben generarse un elevado número de "regiones" compuestas de un número m de estaciones con una longitud n concordantes con el tipo de región realmente analizada.

Las conclusiones alcanzadas por este tipo de trabajos no resultan definitivas por la dificultad de comparar resultados alcanzados con técnicas de Montecarlo y por la extraordinaria diversidad de métodos de estimación de parámetros empleados con cada uno de los modelos de ley. En cualquier caso, y siguiendo a WMO, (1989), pueden resaltarse las siguientes conclusiones genéricas en el análisis de robustez:

- los modelos que utilizan datos locales y regionales son más robustos incluso si la región es moderadamente heterogénea
- los modelos de 2 parámetros presentan una reducida varianza (var_T) incluso con estimación local de parámetros, pero suelen sufrir de sesgo (b_T)

- los modelos de 3 o más parámetros no suelen presentar sesgo (b_T), pero alcanzan valores prohibitivos en su varianza (var_T) si se estiman sus parámetros de forma local, por lo que la estimación regional es prácticamente inevitable
- el método de regionalización de "variable índice" realizando un media de los PWM es una buena alternativa
- el modelo WAK con estimación regional de parámetros tiene buenas características con independencia de la población subyacente, a costa de complicar el proceso operativo al tratar con 5 parámetros
- el modelo GEV es bueno con población GEV y de una gran sencillez de empleo, pero le falta algo de flexibilidad con otras poblaciones lo que conduce a un cierto sesgo
- el modelo TCEV plantea alguna complicación operativa y aunque no suele producir sesgo tiene una varianza algo elevada
- el modelo LP3, según el método de estimación de parámetros propuesto en USWRC, (1981), es el menos eficiente con una mayor varianza.
- las numerosas variantes en los algoritmos de estimación de parámetros complican el establecer conclusiones válidas.

Un ejemplo reciente de este tipo de métodos se presenta en Ferrer, F.J. y Mateos, C., (1999) en el que, para la función de distribución $SQRT-ET_{max}$ se muestra la superioridad del método regional de "variable índice" utilizando PWM sobre las alternativas tanto de estimación local por ML como de estimación regional de "variable índice" utilizando ML y MOM.

7. RESULTADOS DEL MODELO REGIONAL "VARIABLE ÍNDICE" LEY $SQRT-ET_{max}$ Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PWM

En Ferrer, F.J., (1996) se propone la ley de frecuencia $SQRT-ET_{max}$, con estimación de parámetros por PWM en un esquema regional de "variable índice", que a su vez se compara con las siguientes alternativas también regionales:

- Ley de frecuencia GEV, con estimación de parámetros por PWM
- Ley de frecuencia LP3, con estimación de parámetros por MOM
- Ley de frecuencia TCEV, con estimación de parámetros mediante un esquema combinado de MOM y ML

Dicho trabajo emplea el mismo conjunto de precipitaciones máximas diarias utilizado en el trabajo de escala peninsular de Ferrer, F.J, y Ardiles, L., (1994), constituido por 1505 estaciones con más de 30 años de registro y agrupadas en las 26 regiones geográficas, ya mostradas en la figura 6. Esta aplicación incluye la estimación de cuantiles y la comparación de las cuatro alternativas anteriores mediante algunos de los métodos indicados anteriormente, resumiendo a continuación algunos de los resultados alcanzados, especialmente en lo que respecta al modelo $SQRT-ET_{max}$.

7.1. Cuantiles estimados

Los cuantiles estimados en las cuatro alternativas son prácticamente coincidentes en las 26 regiones hasta un período de retorno de 25 años, incrementándose progresivamente las diferencias para superiores períodos de retorno. En la figura 7 se comparan los resultados en la región correspondiente a la zona más mediterránea de la Confederación Hidrográfica del Júcar, donde se aprecia asimismo, la infravaloración resultante de utilizar la función de distribución Gumbel que se reflejaría como una recta en la figura anterior que utiliza papel de Gumbel.

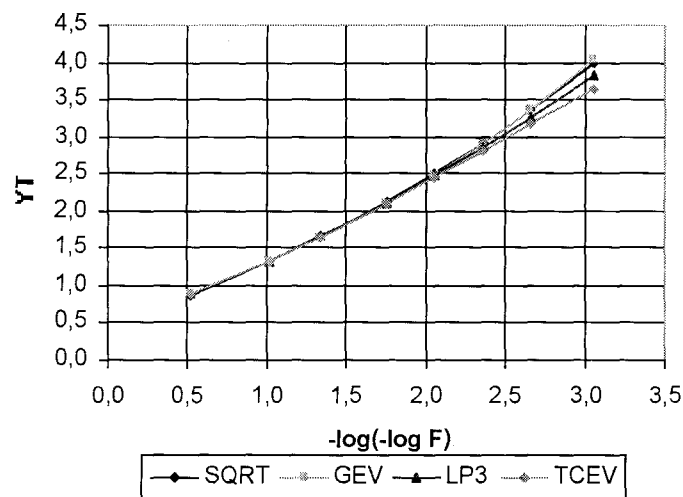


Figura n° 7: Comparación gráfica de los resultados en la región 08.01 en Ferrer, F.J., (1996)

En cualquier caso, resulta más clarificador realizar en las 26 regiones la comparación del cuantil de 500 años (Y_{500}) estimado por cada uno de los 4 modelos y su valor promedio, presentándose los resultados en forma gráfica en la figura 8.

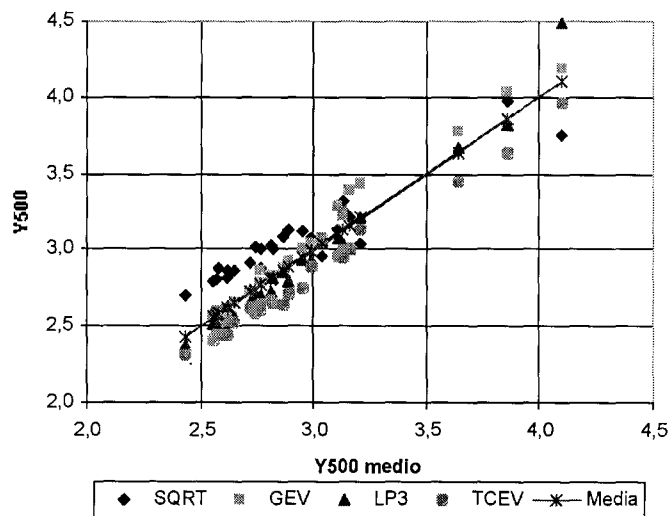


Figura n° 8: Comparación gráfica del cuantil Y_{500} en Ferrer, F.J., (1996)

Como conclusión podría indicarse que los resultados obtenidos en el análisis de SAM de lluvias diarias con un esquema regional de "variable índice" son bastante similares, hasta un período de retorno de 500 años, con independencia del modelo de ley de frecuencia seleccionado. El modelo TCEV tiende a obtener los menores cuantiles y el SQRT-ET_{max} los mayores, especialmente en las regiones no mediterráneas. En este último modelo se nota una cierta rigidez, debido a su menor número de parámetros, que conduce a mayores cuantiles en regiones poco torrenciales y a resultados intermedios en las regiones de superiores cuantiles. Los modelos GEV y LP3 obtienen los cuantiles intermedios siendo mayores en general en el primer caso.

7.2. Análisis de la capacidad descriptiva

El análisis de la capacidad descriptiva de los cuatro modelos alternativos se analiza con los siguientes métodos:

- Índices numéricos de ajuste
- Análisis del máximo valor observado en las muestras (x_N)
- Diagrama de momentos $C_v - C_s$
- Simulaciones de Montecarlo del coeficiente de sesgo (C_s)

Los resultados del modelo SQRT-ET_{max} son buenos a pesar de contar con sólo dos parámetros y se considera ilustrativa la comparación mostrada en la figura 9. En esta figura se representan, para cada una de las cuatro alternativas y las 26 regiones, en abcisas el promedio de los C_s muestrales de las series observadas y en ordenadas el promedio de los C_s muestrales de 10.000 series simuladas mediante Montecarlo a partir de las poblaciones alternativas.

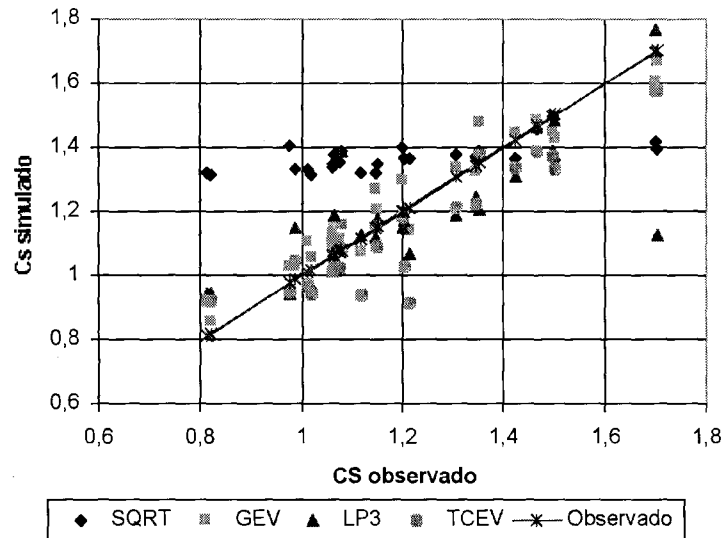


Figura nº 9: Comparación del valor medio del C_s muestral en las regiones: observado y simulado (Ferrer F.J., (1996))

Esta figura muestra en general la dificultad de reproducir el C_s muestral para todos los modelos y como el modelo SQRT-ET_{max} muestra una cierta rigidez resultado de su menor número de parámetros, que no obstante tiende a ser conservado-ra y más acen-tuada en las regiones con menores C_s , presentando buenos resultados en regiones con C_s medio-altos, siendo por ejemplo la mejor opción en la región 0801. Por otra parte, la gran variedad de valores observados de C_s plantea claramente la dificultad de la ley de Gumbel, con un C_s poblacional fijo e igual a 1,14 para reproducir la cola derecha en las regiones mediterráneas con valores muestrales claramente superiores.

7.3. Análisis de la capacidad predictiva mediante simulaciones de Montecarlo

El objeto del análisis se centró en cuantificar la bondad de los distintos modelos y métodos de estimación de parámetros ante una panorámica de distintas poblaciones, analizando, más que la bondad de un modelo ante muestras extraídas de su propia población, sus limitaciones ante poblaciones procedentes de otros modelos. Esta es la base del análisis de la robustez de un modelo, puesto que en un caso real es imposible asegurar cual es el modelo de la población y sólo el estudio de su sensibilidad ante distintas hipótesis de dicha población permite extraer conclu-siones válidas. Para tener en cuenta el efecto de trabajar con regiones "suaves" y "bruscas" se consideraron dos regiones "tipo", una análoga a la 0204 y otra análoga a la 0801. La primera corresponde a una zona interior de la cuenca del Duero en tanto la segunda incluye la zona costera mediterránea de las Comuni-da-des de Valencia y Murcia. El primer caso es un claro ejemplo de un tipo de región donde una ley Gumbel descri-be bastante bien los datos observados, en tanto el segundo es un ejemplo de región pluviométrica "brusca" en la que un modelo Gumbel resulta claramente inseguro. Para estos dos tipos de región se asumió una población proce-dente de cada uno de los 4 modelos alternativos, por lo que se simularon por Montecarlo 8 regiones compuestas por 58 estaciones con una longitud media de 40 años, lo que condujo con un número de repeticiones de 500 a generar 9.280.000 valores ($4 \times 2 \times 500 \times 58 \times 40$) lo que resulta un importante esfuerzo computacional. En cada una de los dos tipos de regiones y para cada una de las cuatro alternativas, de las que por hipótesis se conocen los cuantiles reales x_T de cada población, se utilizan los modelos estadísticos propuestos para obtener las estimas \hat{x}_T de los cuantiles, analizando la bondad de cada modelo mediante su sesgo (b_T), su varianza (var_T) y su error (e_T) ya definidos en las expresiones (32), (33) y (34). El análisis ha caracterizado cada modelo por los peores resultados alcanzados en el conjunto de las cuatro poblaciones alternativas lo que mide efectivamente su robustez ante distintas poblaciones. El modelo SQRT-ET_{max} alcanzó buenas características de varianza en ambos tipos de regiones con tendencia a ser la mejor opción para altos períodos de retorno. No obstante presenta ciertas limitaciones en cuanto al sesgo que lo convierte en claramente conservador en la región del tipo "suave" lo que penaliza el valor obtenido en el error, aunque alcanza valores similares al resto de modelos en la región tipo "torrencial".

7.4. Características de la función SQRT-ET_{max}

Como resumen de los anteriores análisis, se considera que las ventajas de la función SQRT-ET_{max} proceden principalmente del hecho de estar formulada con sólo dos parámetros. Ello, además de ventajas intrínsecas como la más sencilla estimación de parámetros y la aplicación del principio de parsimonia de parámetros, abre las siguientes posibilidades:

- Empleo con un estimación local de paráme-tros, lo que resulta prohibitivo en términos de varianza, para funciones de distribución de tres ó más parámetros.

- Definición de los cuantiles regionales de un esquema de "variable índice" en función de un único parámetro: el parámetro k de forma. Ello posibilita una regionalización espacial mucho más sencilla y flexible en forma de un único plano de isolíneas o de mosaico (Ferrer, F.J. y Ardiles, L., 1994), como el mostrado en la figura 10.

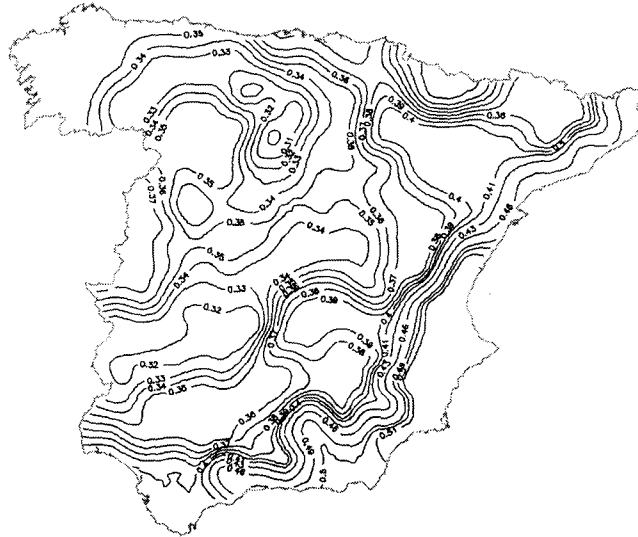


Figura nº 10: Isolíneas del C_v consideradas en Ferrer, F.J., y Ardiles, L. (1994)

Por otra parte y frente a otros modelos de dos parámetros presenta las siguientes ventajas:

- Es el único modelo desarrollado teóricamente para el análisis de máximas lluvias diarias, lo que le da una cierta consistencia en el análisis genérico de máximos hidrológicos.
- Conduce siempre, por la estructura de su formulación, a resultados más conservadores que el tradicional modelo Gumbel (EV1), de amplio uso en nuestro país.
- En el rango habitual de las máximas lluvias diarias, con C_v entre 0,30 y 0,55, la relación implícita entre C_v y C_s se ajusta mucho mejor a lo predicho por modelos más flexibles de tres ó más parámetros que la relación existente en otros modelos de dos parámetros como Gumbel o Lognormal.

Las limitaciones de la función $SQRT-ET_{max}$ proceden asimismo del hecho de estar definido con sólo 2 parámetros, lo que lleva a la existencia de una relación fija entre el C_v y el C_s que, en la medida que puede alejarse de la relación realmente subyacente en la población, supondrá una cierta rigidez. No obstante, el análisis de la capacidad descriptiva de la cola derecha de la distribución, muestra cómo la mencionada falta de flexibilidad se concentra en las regiones con cuantiles menores y menor C_v poblacional.

8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El objetivo del análisis de frecuencias de máximas lluvias diarias es la estimación de los cuantiles o valor de la variable correspondiente a un determinado período de retorno T en años, para lo que se emplea habitualmente la modelación estadística de SAM.

Esta modelación requiere la elección simultánea de:

- a) tipo de función de distribución
 - b) método de estimación de parámetros y cuantiles
 - c) esquema para un uso combinado de datos locales, regionales e históricos
- Una amplia gama de funciones de distribución de 2, 3 e incluso 4 y 5 parámetros han sido empleada, entre las que destacan por su frecuencia de uso y/o sus adecuadas características estadísticas las funciones Gumbel, SQRT-ET_{max} de dos parámetros y la función GEV de tres.

La estimación local de parámetros utiliza exclusivamente la serie de máximos anuales de la estación pluviométrica a modelar y emplea tradicionalmente los métodos de momentos (MOM), máxima verosimilitud (ML) y más recientemente de momentos ponderados probabilísticamente (PWM). La estimación de parámetros a partir exclusivamente de una muestra, de reducido tamaño numerosas veces, presenta una elevada varianza que se traduce en una gran dispersión de resultados, especialmente con funciones de distribución de tres o más parámetros. Esto conduce al desarrollo de numerosas metodologías que asumen la existencia de una región homogénea en la que se aprovecha el conjunto de información disponible realizando algún tipo de promedio.

El esquema de análisis regional más empleado en el tratamiento de lluvias máximas es el denominado "variable índice", que asume que los cuantiles locales se obtienen reescalando, mediante la media local, una única ley regional adimensional, lo que supone C_s y C_v constante en la región.

Las líneas actuales de investigación consideran de forma global el problema de la modelación estadística de SAM, no admitiéndose una distinción artificial entre el tipo de función de distribución, el método de estimación de parámetros o el método de regionalización adoptado, por lo que la selección debe hacerse entre modelos "completos". Esta selección puede hacerse mediante dos tipos de enfoques:

- Técnicas que contrastan la capacidad "descriptiva" o capacidad del modelo para reproducir las propiedades estadísticas de los datos
 - Técnicas que contrastan la capacidad "predictiva" o la capacidad de un modelo para estimar los cuantiles de una población, incluso cuando ésta sigue un modelo de ley distinta a la supuesta.
- Este conjunto de técnicas no son especialmente aplicadas en la práctica por los Servicios de Hidrología y Meteorología, lo que en parte justifica el extendido empleo de la distribución de Gumbel para el análisis de las máximas lluvias diarias, a pesar de las limitaciones que plantea, especialmente en las regiones mediterráneas en las que infravalora los cuantiles estimados. Una propuesta reciente a nivel nacional (MF-DGC, 1999) adopta el trabajo de Ferrer, F.J. y Ardiles, L., (1994) que utiliza la función de distribución SQRT-ET_{max} en un esquema regional de variable índice y estimación de parámetros por MOM. No obstante, Ferrer, F.J. y Mateos, C., (1999) han demostrado que se obtienen mejores resultados al emplear un método de PWM para la estimación de parámetros.

Como resumen, puede concluirse que el modelo SQRT-ET_{max} es una alternativa sencilla y adecuada para el análisis regional de máximas lluvias diarias, conduciendo a resultados más conservadores que Gumbel y que resultan claramente más adecuados en las zonas mediterráneas. Frente a las ventajas inherentes al empleo de sólo 2 parámetros en su formulación, sólo cabe achacarle un cierto conservadurismo en regiones "suaves" con menores cuantiles.

9. REFERENCIAS

- ACREMAN, M.C. y SINCLAIR, C.D., (1986): "Classification of drainage basins according to their physical characteristics; An application for flood frequency analysis in Scotland". *J. Hydrol.*, 84, 365-380.
- BEARD, L.R., (1974): "*Flood flow frequency techniques*". Center for Research in Water Resources, Univ. de Texas en Austin, 28 pp.
- BERAN, M.A., HOSKING, J.R.M., y ARNELL, N., (1986): "Comment on 'Two-component extreme value distribution for flood frequency analysis' by Rossi et al.(1984)". *Water Resour. Res.*, 22(2), 263-266.
- BENSON, M.A., (1968): "Uniform flood frequency estimating methods for federal agencies". *Water Resour. Res.*, 4(5), 891-891.
- CEDEX, (1993): "*Recomendaciones para el Cálculo Hidrometeorológico de Avenidas*". M-37, MOPTMA. 76 pp
- CUNNANE, C., (1987): "Review of statistical models for flood frequency estimation". *Regional Flood Frequency Analysis*, 49-95, Ed. V.P.Singh. Reidel Publishing Company.
- CHOW, V.T., (1954): "The log probability law and its engineering applications". *Proc. ASCE*, 80(536), 1-25.
- ETOH, T. y MUROTA, A., (1986): " Probabilistic Model of Rainfall of a Single Storm". *Journal od Hydrosience and Hydraulic Engineering*, Vol 4 (1), Abril 1986, 65-77.
- ETOH, T., MUROTA, A. y NAKANISHI, M., (1987): "SQRT-Exponential type distribution of maximum". *Regional Flood Frequency Analysis*, 253-264, Ed. V.P.Singh. Reidel Publishing Company.
- FERRER, F.J. (1996): "*El modelo de función de distribución SQRT-ETmax en el análisis regional de máximos hidrológicos. Aplicación a lluvias diarias*". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- FERRER, F.J. y ARDILES, L., (1994): "Análisis estadístico de las series anuales de máximas lluvias diarias en España". *Ingeniería Civil*. N. 95, 87-100.
- FERRER, F.J. y MATEOS, C., (1999): "Análisis de máximas lluvias diarias. Un nuevo método regional de estimación de parámetros de la función de distribución SQRT-ET_{max}". *Ingeniería Civil*. N. 115, 109-118.
- GUMBEL, E.J., (1941): "The return period of flood flows". *Ann. Math. Statist.*, 12(2), 163-190.
- GREENWOOD, J.A., LANDWEHR, J.M., MATALAS, N.C. y WALLIS, J.R., (1979): "Probability weighted moments: Definitions and relation to parameters of distributions expressible in inverse form". *Water Resour. Res.*, 15(5), 1049-1054.

- HARDISON, C.H., (1974): "Generalized Skew Coefficients of Annual Floods in the United States and Their Application". *Water Resour. Res.*, 10(4), 745-752.
- HOUGHTON, J.C., (1978): "Birth of a parent: The Wakeby distribution for modelling flood flows". *Water Resour. Res.*, 14(6), 1105-1109.
- HOSKING, J.R.M., WALLIS, J.R. y WOOD, E.F, (1985): "Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability weighed moments". *Technometrics*, 27(3), 251-261.
- HOSKING, J.R.M., (1987): "Regional homogeneity: Review of statistical flood frequency estimation". Open file report nº 6, *Institute of Hydrology*, 34 pp.
- INSTITUTO DEL AGUA, (1992): "*Estudio Hidrológico de Ramblas Costeras de la Región de Murcia*". Univ. Murcia.
- JIN, M., STEDINGER, J.R., (1989): "Flood Frequency Analysis with Regional and Historical Information". *Water Resour. Res.*, 25(5), 925-936.
- LANGBEIN, W.B., (1949): "Annual floods and the partial duration flood series". *Trans. Am. Geophys. Union*, 30, 879-881.
- LETTENMAIER, D.P., POTTER, K.W., (1985): "Testing flood frequency estimation methods using a regional flood generating model". *Water Resour. Res.*, 21(12), 1903-1914.
- MATALAS, N.C., WALLIS, J.R., SLACK, J.R., (1975): "Regional skew in search of a parent". *Water Resour. Res.*, 11(6), 815-826.
- MF-DGC, (1999): "*Máximas Lluvias diarias en la España peninsular*". Dirección General de Carreteras. Ministerio de Fomento
- MOPU-DGC, (1990): "*Instrucción de Carreteras. Drenaje. Norma 5.1- IC*". Dirección General de Carreteras, Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo.
- NERC, (1975): "Flood Studies Report". *Nat. Environ. Res. Council*, London, Vols. 1-5, 1100 pp.
- REED, D.W., (1992): "Rainfall frequency analysis for flood design". *Pre-proceedings of the NATO ASI on "Copyng with Floods"*, E. Majorana Centre, Erice, Noviembre 3-15, 17 pp.
- ROSSI, F., FIORENTINO, M., VERSACE, P., (1984): "Two component extreme value distribution for flood frequency analysis". *Water Resour. Res.*, 20(7), 847-856.
- ROSSI, F., FIORENTINO, M., VERSACE, P., (1986): "Reply to comment by Beran et al.(1986)". *Water Resour. Res.*, 22(2), 267-269.

SAENZ DE ORMIJANA, F., HIDALGO CASTRO, F.J., SANTA PÉREZ, A., (1991): "Estimación de precipitaciones máximas mediante el método regional del índice de avenida". *Rev. Obras Publ.*, Febrero, 9-22.

SCHAEFER, M.G., (1990): "Regional Analyses of Precipitation Annual Maxima in Washington State". *Water Resour. Res.*, 26(1), 119-131.

SONG, D., DING, J., (1988): "Estimation of Pearson type 3 parameters by method of probability weighted moments". *J. Hydrol.*, 101, 47-61.

USWRC, (1981): "*Guidelines for determining flood flow frequency*". Bulletin 17B, Hydrology Committee, Water Resources Council, Washington.

WALLIS, J.R., MATALAS, N.C., SLACK, J.R., (1974): "Just a moment!". *Water Resour. Res.*, 10(2), 211-219.

WILTSHIRE, S.W., (1986): "Identification of homogeneous regions for flood frequency analysis". *J. Hydrol.*, 84, 287-302.

WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, (1984): "*WMO Survey on distribution types currently in use for frequency analysis of extremes of floods by Hydrological and other Services*".

WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, (1989): "*Statistical Distributions for Flood Frequency Analysis*". WMO Operational Hydrology Report N. 33, 73 pp.

YEVJEVICH, V., (1972): "*Probability and Statistics in Hydrology*". Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.